

Resumen de Proyecto Fin de Carrera.

**Elementos Finitos Curl-Conformes de Orden Superior. El
Tetraedro de Tercer Grado**

Autor: Antonio Jesús Ruiz Genovés

Director: Luis E. García Castillo

1 Antecedentes

Las actuales tecnologías de fabricación de dispositivos de alta frecuencia exigen la perfecta caracterización del campo en las diferentes estructuras electromagnéticas que se utilizan. La resolución analítica de las ecuaciones de Maxwell para dichas estructuras, sólo se puede obtener si la geometría de éstas es lo suficientemente sencilla.

Por otro lado, la creciente variedad de geometrías y materiales empleados, los acoplamientos indeseados provocados por el alto grado de miniaturización de los circuitos, la propagación de modos superiores originados en las discontinuidades, las pérdidas de radiación presentes en estructuras no encapsuladas, el análisis electromagnético de antenas o el estudio de la sección radar de objetos, obligan a utilizar métodos numéricos de aproximación para su resolución.

Es necesario el empleo de un método numérico que sea capaz de efectuar un análisis preciso y fiable de dichas estructuras. El método de cálculo empleado, asimismo, debe ser lo suficientemente versátil y flexible como para aplicarse a diferentes geometrías sin la necesidad de plantear nuevas formulaciones analíticas. Un último requisito es que sea lo más eficiente posible en términos de necesidades de memoria y almacenamiento, tiempo de cálculo, etc.

El *Método de los Elementos Finitos (MEF)* ha demostrado ser una herramienta de cálculo numérico precisa y de gran flexibilidad. Su aplicación a problemas electromagnéticos data de la década de los sesenta, experimentando un espectacular avance durante los últimos años. Su gran ventaja frente a otros métodos numéricos estriba precisamente en su flexibilidad, derivada del propio fundamento del método. El *dominio* objeto del problema, Ω , va a ser dividido (mallado) en subdominios simples Ω_i llamados *elementos finitos* ($\Omega = \bigcup_i \Omega_i$). Sobre cada uno de ellos se aplicará la formulación integral que permite obtener la incógnita del problema. De este modo, se pasa de una formulación integral global sobre Ω a una formulación integral sobre cada subdominio (elemento Ω_i). La geometría del elemento empleado (elemento triangular, cuadrilátero, tetraédrico, hexaédrico, etc.) y el grado de la aproximación que se realiza en el mismo (lineal, cuadrática, cúbica, etc.) caracterizan perfectamente la aproximación del método. La incógnita se aproxima en cada uno de los elementos por una combinación lineal de las llamadas *funciones de forma* donde, los coeficientes de éstas, los llamados *grados de libertad*, están asociados a los nodos del elemento. Un posterior ensamblado de todos los elementos, en base a la igualdad de los grados de libertad de elementos diferentes asociados a un mismo nodo, proporciona el sistema de ecuaciones global (matrices ensambladas).

Ofrece también una gran precisión siempre que la discretización sea suficientemente elevada e inteligente, para lo que se emplean técnicas de mallado autoadaptativo entre otros procedimientos. Como inconveniente frente a otros métodos numéricos cabe citar el tamaño de las matrices resultantes. En este sentido, es muy importante aprovechar de forma eficiente la estructura dispersa de las matrices, fruto del carácter local del operador diferencial. De este modo pueden abordarse problemas complejos manteniendo los requerimientos de almacenamiento y tiempos de cálculo dentro de unos límites razonables.

Durante los últimos años el Grupo de Microondas y Radar del Departamento de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones de la E.T.S.I. de Telecomunicación de Madrid ha mantenido una activa línea de investigación sobre la aplicación del *MEF* a diversos problemas electromagnéticos. El *MEF* se ha empleado básicamente en el análisis de problemas en dos dimensiones. La experiencia obtenida confirma la flexibilidad y potencia del *MEF*. En definitiva se disponía de un simulador electromagnético en dos dimensiones (2D) de gran versatilidad. El simulador hace uso de técnicas avanzadas como el empleo de un procedimiento de mallado autoadaptativo, o la discretización mediante elementos finitos no estándar que evitan la contaminación del espectro por modos espurios.

En este contexto, el trabajo realizado en el proyecto al que hace referencia el presente resumen representa una continuación de los trabajos de investigación de dicho grupo, en particular,

de los trabajos realizados por D. Luis Emilio García Castillo¹ y D.^a Magdalena Salazar Palma².

Una de las líneas de investigación de dicho trabajo, [García-Castillo(1998)], se centra en los elementos finitos *curl-conformes* de orden superior en 3D para la discretización de formulaciones vectoriales con el campo eléctrico y/o el campo magnético. En ella se realiza un estudio de los elementos curl-conformes propuestos por Nédélec, en concreto, los de la primera familia de orden k , con objeto de desarrollar implementaciones de orden superior de dichos elementos. Dicho estudio se realiza siguiendo rigurosamente la definición del elemento dada en [Nédélec(1980)] particularizándola al caso 3D (elemento tetraédrico) dado que el diseño de las estructuras electromagnéticas y la perfecta caracterización de los efectos descritos anteriormente requieren, en general, un análisis en tres dimensiones.

En este sentido, el trabajo realizado en el proyecto parte de la implementación, conclusiones y resultados obtenidos para el elemento tetraédrico de segundo grado de Nédélec obtenidos en [García-Castillo(1998)] así como de los desarrollos y conclusiones obtenidos para otras familias de elementos finitos curl-conformes, en concreto las correspondientes a los elementos de [Lee *et al.*(1991a), Lee *et al.*(1991b)] y [Peterson(1994), Savage y Peterson(1996)], cuya definición no se ajusta a la dada por Nédélec [Nédélec(1980)].

2 Objetivos y Aportaciones del Proyecto

La necesidad de disponer de simuladores electromagnéticos que incorporen métodos numéricos precisos y computacionalmente óptimos en los procesos de cálculo unido a las ventajas demostradas por los elementos curl-conformes en su aplicación a problemas electromagnéticos ha forzado el desarrollo de aplicaciones software de última tecnología por parte de entidades privadas y universidades. La incorporación de elementos finitos de un orden cada vez mayor en dichas herramientas, es un objetivo que se persigue con la garantía de obtener mejores resultados computacionales y numéricos: cada día se exige a las aplicaciones y equipos mayor precisión y menor tiempo de CPU.

En este sentido, la programación de herramientas numéricas de cálculo como el *MEF*, con la incorporación de nuevos elementos en base a los que construir una aproximación a diferentes problemas electromagnéticos exige, como paso previo a su programación, el conocimiento teórico de dichos elementos así como un cuidadoso análisis de sus propiedades y proceso a seguir para su correcto ensamblado.

Los elementos finitos curl-conformes de primer y segundo grado ya han sido empleados por la comunidad científica en la programación de software de última tecnología. No así los de tercer grado. El trabajo realizado en el proyecto se centra precisamente en dichos elementos: elementos curl-conformes de tercer grado; dando el primer paso para su programación en herramientas comerciales y/o de las universidades, por lo que en este sentido, supone una aportación original en este campo. Para ello se estudian en detalle dichos elementos, obteniendo resultados concluyentes sobre sus propiedades, definición, mecanismos de cálculo y procedimientos de ensamblado, estableciendo una fundamental ayuda para su programación y próxima incorporación a herramientas de cálculo comerciales.

Además de las especiales características comunes a todos los elementos de la primera familia de Nédélec (tanto en 2D como en 3D), los elementos en 3D presentan algunas peculiaridades que no se encuentran en los elementos en 2D. El empleo del elemento de segundo grado de dicha familia representa, en sí mismo, una mejora de la eficiencia computacional, dado que, como es bien sabido, los elementos finitos de segundo grado requieren menos grados de libertad que los elementos de primer grado para obtener una precisión dada. En este mismo sentido la mejora computacional debida al empleo del elemento de tercer orden es inmediata. Esta ventaja resulta

¹Profesor Titular de Universidad. Universidad de Alcalá.

²Profesor Titular de Universidad. Universidad Politécnica de Madrid.

especialmente importante en problemas en 3D donde el número de incógnitas crece de forma muy rápida con el tamaño o la densidad de discretización del problema.

Aumentar, como se ha hecho, en un grado el orden de la aproximación, no representa únicamente elevar el número de funciones de forma que intervienen en la combinación lineal con la que se aproxima la incógnita. La definición matemática del elemento planteada en [Nédélec(1980)] fija en tres los tipos de grados de libertad, asociándose estos respectivamente a las aristas, las caras o el volumen del p -símplice³ (tetraedro). En el caso 3D, el cálculo de los grados de libertad asociados a las caras y volumen cobra especial importancia, ya por su participación en el proceso de ensamblado en el caso de las caras como por la libertad de elección sobre algunos parámetros en ambos casos. En el elemento de orden 2, los grados de libertad asociados al volumen no existen y es en los grados de libertad asociados a las caras donde se va a encontrar un procedimiento flexible para la construcción y ensamblado de las funciones de forma. En [García-Castillo(1998)] se exponen claros resultados que orientan al programador a implementar el elemento de una manera muy concreta. En el elemento de orden 3 desarrollado, los grados de libertad asociados a las caras incorporan características diferenciadoras respecto a los de grado 2, por lo que, si cabe, el procedimiento es aún más complejo a la vez que flexible, dada la cantidad de elementos (parámetros) por determinar y la libertad de elección para estos existe.

Ha sido, por tanto, objetivo del proyecto la implementación del elemento tetraédrico (3D) de tercer grado de Nédélec siguiendo rigurosamente la definición de elemento dada en [Nédélec(1980)], así como el estudio de sus propiedades y características, evaluando la medida en que las propiedades estudiadas para el elemento de orden 2 son, si procede, extrapolables al elemento de orden 3, estudiando el comportamiento del mismo atendiendo a la flexibilidad de su construcción planteada a través de los grados de libertad asociados a las caras y volumen. En este sentido se detalla para el programador que emplee el *MEF* como herramienta de cálculo y estos elementos (elementos *curl-conformes* de Nédélec) como posibles *elementos finitos* Ω_i ; la manera de proceder para su correcta definición y ensamblado, orientada ésta siempre a la obtención de unas mejores prestaciones numéricas.

Así mismo, se investigan y contrastan las particulares características de los elementos tetraédricos *curl-conformes* de Nédélec, en cuanto a su comportamiento frente a espurios, precisión, convergencia, etc., mostrándose las principales diferencias con otras familias de elementos *curl-conformes*, en el análisis de un sencillos mallados representativos de posibles problemas electromagnéticos.

Finalmente, se realiza un estudio de los diferentes elementos tetraédricos de orden 3 que han aparecido en la literatura como “implementaciones” de la teoría planteada por Nédélec en [Nédélec(1980)] en cuanto a la manera en que dichas implementaciones se adaptan o no a dicha propuesta. En particular, se estudian los elementos de Peterson *Versiones 1 y 2*, Andersen-Volakis, y Graglia [Peterson(1996), Peterson *et al.*(1998), Andersen y Volakis(1998), Graglia *et al.*(1997)]. Así mismo, se estudian las propiedades de sus funciones de forma en cuanto a propiedades numéricas, comportamiento frente a espurios, precisión, etc., mostrándose de este modo las principales diferencias con otras familias de elementos *curl-conformes*. Cabe destacar que entre los diferentes elementos estudiados se incluyen los denominados *Elementos de Tipo Jerárquico* [Andersen y Volakis(1998)], como alternativa a los restantes, *Elementos con Funciones de Base de Tipo Interpolatorio* todos ellos.

3 Publicaciones

Las publicaciones a que ha dado lugar el proyecto son las siguientes:

³Símplice: triángulo en 2D y tetraedro en 3D.

- [Ruiz-Genovés *et al.*(2000a)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, y M. Salazar-Palma. “A comparison among several families of mixed-order second order curl-conforming finite elements.” *5th*. Boston (USA), 2000a. Comunicación 3-6 (1 página).
- [Ruiz-Genovés *et al.*(2000b)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, y M. Salazar-Palma. “Comparación entre diversas familias de elementos finitos curl-conformes de orden mixto.” *XV*, págs. 567–568. Zaragoza (España), 2000b.
- [Ruiz-Genovés *et al.*(2001a)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, y M. Salazar-Palma. “A comparison among several families of mixed-order second order curl-conforming finite elements.” *Electromagnetics*, 2001a. (en proceso de revisión).
- [Ruiz-Genovés *et al.*(2001b)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, M. Salazar-Palma, y T. K. Sarkar. “Third-order nédélec tetrahedral finite element.” págs. xx–xx. Boston, Massachusetts, USA, 2001b.
- [Ruiz-Genovés *et al.*(2001c)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, M. Salazar-Palma, y T. K. Sarkar. “Third-order nédélec tetrahedral finite element.” *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics 2001 Conference (ECCOMAS CFD 2001)*. University of Wales, Swansea, 2001c.

4 Descripción del Proyecto

4.1 Elementos Finitos Curl-Conformes de Nédélec

Los elementos finitos curl-conformes (*curl-conforming* en la literatura anglosajona) reciben su denominación por ser elementos finitos conformes en el espacio de funciones de cuadrado integrable con rotacional (*curl*), a su vez, de cuadrado integrable. Dichos elementos preservan la continuidad de las componentes tangenciales entre elementos pero no así la de las componentes normales, proporcionando una aproximación consistente del campo en las interfaces entre diferentes medios. Además, eliminan el problema de los modos espurios que aparecen en formulaciones vectoriales de campo cuando son discretizadas con elementos clásicos de Lagrange. Los elementos curl-conformes poseen igualmente otras importantes ventajas, como son una sencilla implementación de las condiciones de contorno de Dirichlet en contornos arbitrarios y una buena convergencia en estructuras con esquinas. Todo ello ha convertido a los elementos curl-conformes en la opción preferida para la discretización mediante el *MEF* del campo electromagnético.

Nédélec propuso en 1980 [Nédélec(1980)] una primera familia de elementos curl-conformes de orden k en 2D (triángulos) y 3D (tetraedros). La versión de primer grado de dichos elementos (los denominados *elementos de arista*) ha sido ampliamente utilizada en la comunidad científica. Sin embargo, las versiones de órdenes superiores de dichos elementos no son tan populares, quizás debido a la mayor complejidad de éstos. A esto se une el carácter excesivamente matemático del trabajo [Nédélec(1980)], en el que tan sólo se presenta la definición matemática general de los elementos, sin incluir ningún detalle de su implementación, o de las expresiones de las funciones de base. Ello ha provocado la aparición en la literatura de diferentes implementaciones prácticas de los elementos curl-conformes de Nédélec de orden superior. Dichas implementaciones, sin embargo, no siguen rigurosamente el esquema propuesto en [Nédélec(1980)] y por tanto no son compatibles con la definición del elemento propuesta por Nédélec.

Entre los elementos curl-conformes presentados en el proyecto cabe distinguir entre los elementos de *orden completo* y elementos de *orden mixto*. Los primeros corresponden a aproximaciones polinomiales completas de un cierto orden k (el orden del elemento). Por el contrario, los elementos de orden mixto corresponden a aproximaciones polinomiales no completas, si bien las aproximaciones se eligen completas en el espacio correspondiente al rango del operador rotacional, que es justamente lo que se necesita para la aproximación del campo electromagnético

(campo de rotacional no nulo). De este modo, los elementos de orden mixto permiten aproximaciones del campo electromagnético de un orden dado, k , con menos grados de libertad que sus homólogos de orden completo. La definición exacta de elemento de orden mixto a la que hace alusión el proyecto es justamente la dada por Nédélec en [Nédélec(1980)]. En este sentido, todos los elementos curl-conformes presentados en el proyecto, responden a esta definición.

En el proyecto se propone, considerando las experiencias obtenidas en [García-Castillo(1998)], una metodología de implementación de los elementos de Nédélec para orden arbitrario k que, a diferencia de las implementaciones aparecidas en la literatura, sigue rigurosamente la definición de elemento dada en [Nédélec(1980)]. En particular, se presenta una implementación práctica del elemento tetraédrico de tercer grado de Nédélec siguiendo rigurosamente la definición de elemento dada en [Nédélec(1980)], lo que representa una contribución original en este campo. Igualmente, se ha resuelto el problema del ensamblado de los elementos de Nédélec, cuando se trabaja con estos en el elemento de referencia y se hace uso de los elementos de tercer orden.

Una vez descrito de manera general el elemento de Nédélec de orden k , se ha procedido a identificar en el elemento de orden 3 los diferentes espacios de funciones puestos en juego, así como las dimensiones, características y propiedades de los mismos. Dado que en la construcción del elemento intervienen factores tan flexibles como son el tipo de polinomios empleados en la construcción de las funciones asociadas a las caras, o las direcciones empleadas en la cara o volumen sobre las que descomponer los momentos que representan a los grados de libertad de la aproximación, se ha realizado un estudio detallado de los mismos, mostrándose resultados concluyentes acerca de la conveniencia de su uso con el objetivo de obtener para las matrices representativas del problema o las de los propios sistemas de ecuaciones planteados en la construcción de las funciones de forma, el mejor condicionamiento, prestaciones numéricas, posible.

En este sentido, y en la medida en que el elemento de tercer orden aquí desarrollado es la aproximación inmediata superior a la del elemento de segundo orden planteada en [García-Castillo(1998)], algunos de estos resultados tienen por objeto ratificar las hipótesis de comportamiento de los diferentes elementos de Nédélec de orden k allí planteadas. En otro sentido, se estudian las cualidades no presentes en el elemento de segundo grado y que, sin embargo, dotan al elemento de tercer orden de una gran flexibilidad en su construcción.

Aunque ha sido objetivo del proyecto la implementación del elemento tetraédrico (3D) de tercer orden de Nédélec, el estudio de algunas de sus propiedades ha requerido un estudio más exhaustivo de otros elementos más simples de la misma familia, como han sido los elementos tetraédricos de primer y segundo orden, éste último desarrollado en [García-Castillo(1998), García-Castillo y Salazar-Palma(1998), García-Castillo y Salazar-Palma(2000)], o los elementos triangulares (2D) de primer, segundo y tercer orden.

Las Figuras 1 y 2 muestran el elemento de referencia correspondiente al tetraedro de tercer grado para los casos en los que en la construcción de las funciones de cara se emplean polinomios tipo “monomios” o polinomios de “marcado carácter interpolatorio”, como pueden ser los polinomios de *Lagrange*. En ellas se puede observar la asociación de los 45 grados de libertad que posee el elemento a nodos en las aristas, las caras o al propio tetraedro, al volumen. Los grados de libertad asociados a las aristas corresponden a circulaciones del campo. Los grados de libertad asociados a las caras, a diferencia de lo que sucede con las implementaciones aparecidas en la literatura, corresponden a momentos de orden 1 de la componente de campo tangencial a las caras. De este modo, las funciones de base que se obtienen son diferentes a las aparecidas en la literatura. Las ventajas de las funciones de base del elemento propuesto en el proyecto dan lugar a discretizaciones del problema mejor condicionadas que las correspondientes a discretizaciones con las otras funciones aparecidas en la literatura, lo que se traduce en mejores prestaciones numéricas.

En el proyecto se investigan las particulares características de los elementos tetraédricos curl-conformes de Nédélec, en cuanto a su comportamiento frente a espurios, precisión, etc., mostrándose de este modo las principales diferencias con otras familias de elementos curl-conformes.

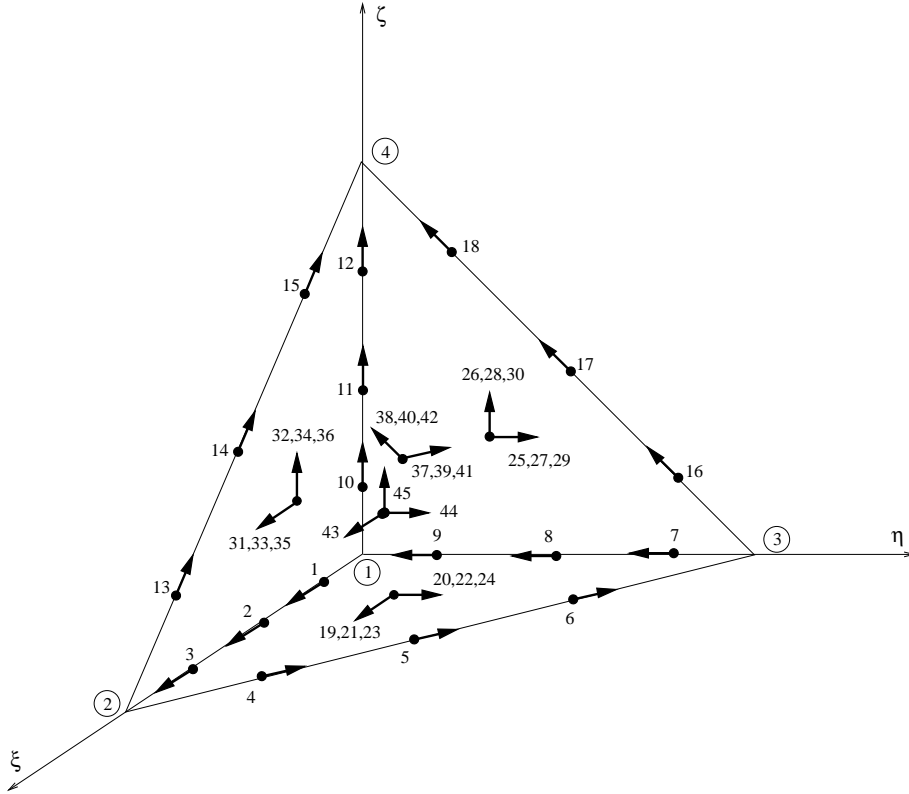


Figura 1: Tetraedro de Grado 3. Elemento de referencia de Nédélec para funciones de cara no interpolatorios

Para ello, los elementos curl-conformes se utilizan en el análisis de sencillos mallados a modo de prototipos representativos de posibles problemas electromagnéticos.

Por último, con objeto de ayudar al lector en la comprensión del elemento de tercer grado, se presenta una representación de las funciones de Nédélec de tercer orden correspondientes a su particularización a una de las caras del tetraedro.

4.2 Otras familias de elementos finitos curl-conformes 3D de tercer grado

En la literatura han aparecido diversos tipos de familias de elementos curl-conformes. En particular, se han propuesto diferentes implementaciones de elementos curl-conformes de orden mixto en símplices (2D y 3D), basadas en el trabajo de Nédélec [Nédélec(1980)]. Ninguna de estas implementaciones sigue, sin embargo, la definición de elemento hecha en [Nédélec(1980)].

Las familias de elementos estudiados e implementados en el proyecto, responden a un planteamiento en la definición de sus *funciones de forma* distinto al planteado por Nédélec. Mientras las funciones de forma de cualquiera de los elementos pertenecientes a la familia de elementos finitos curl-conformes de Nédélec debe construirse definiendo para cada una de ellas todos y cada uno de los parámetros que la integran (según la definición teórica hecha en [Nédélec(1980)]), el resto de las familias de funciones aparecidas en la literatura como “implementaciones del trabajo de Nédélec” se definen en base a combinaciones de funciones y el operador *gradiente* sobre las *coordenadas volumétricas* L_1, L_2, L_3 y L_4 (caso del tetraedro, 3D), de un punto genérico $P(x, y, z)$ inmerso en un elemento (real o el de referencia). Una definición de este tipo hace inmediato el cálculo de las funciones de forma, permitiendo realizar aproximaciones mediante el *MEF* sin hacer uso del elemento de referencia, como ocurre con las aproximaciones que emplean el elemento de Nédélec del proyecto.

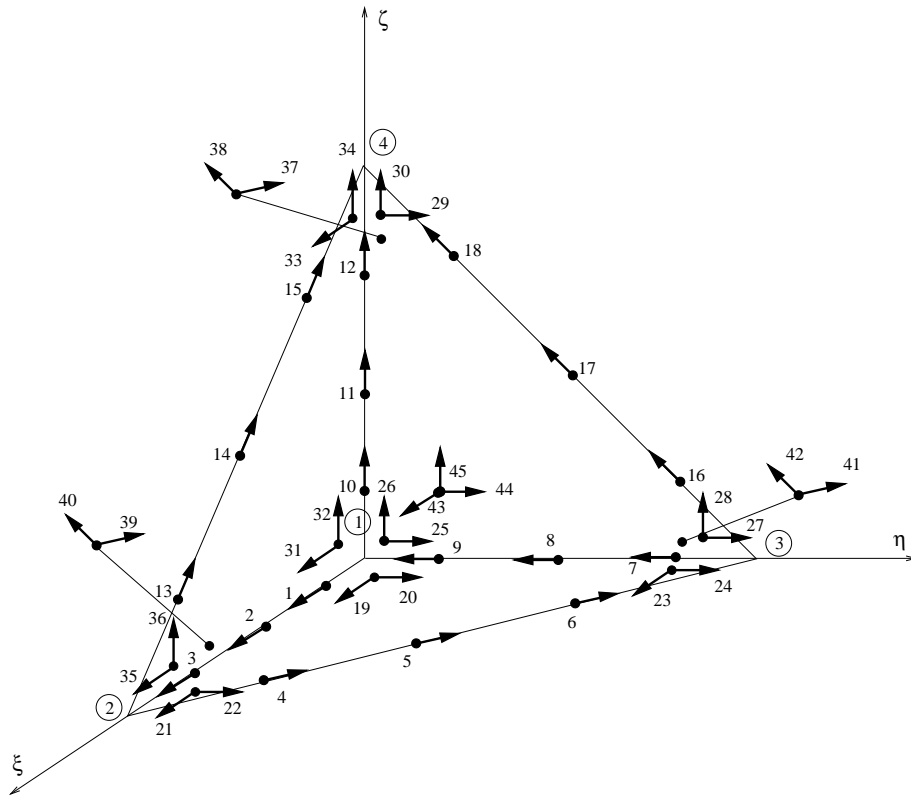


Figura 2: Tetraedro de Grado 3. Elemento de referencia para los funciones de cara de Lagrange

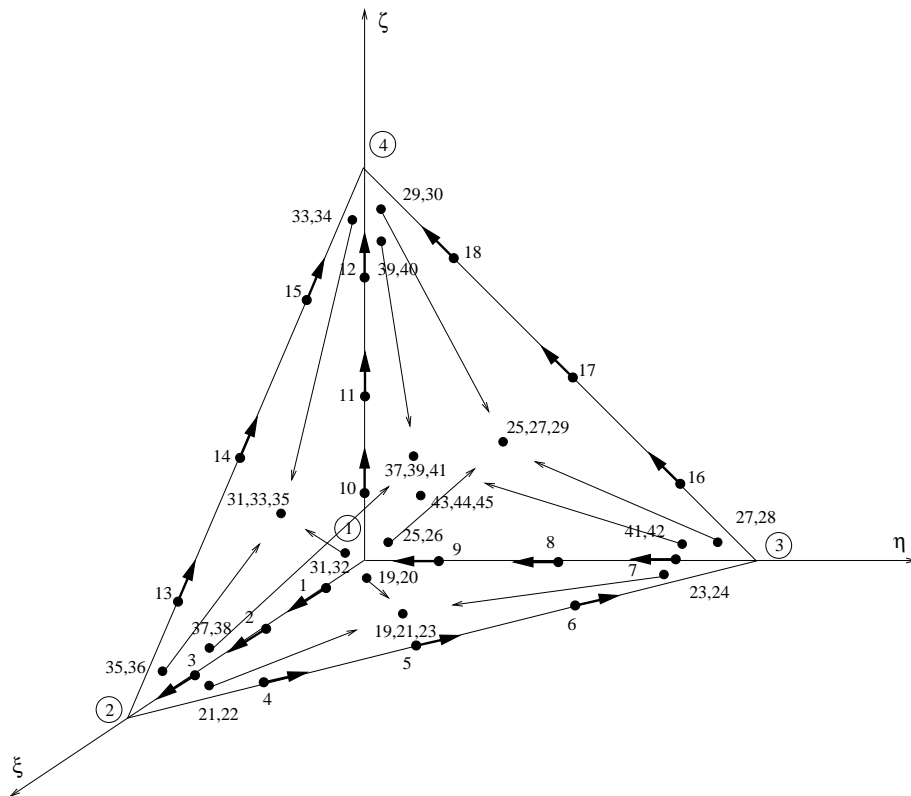


Figura 3: Tetraedro de Peterson *Versión 2* de Grado 3 —elemento de referencia—

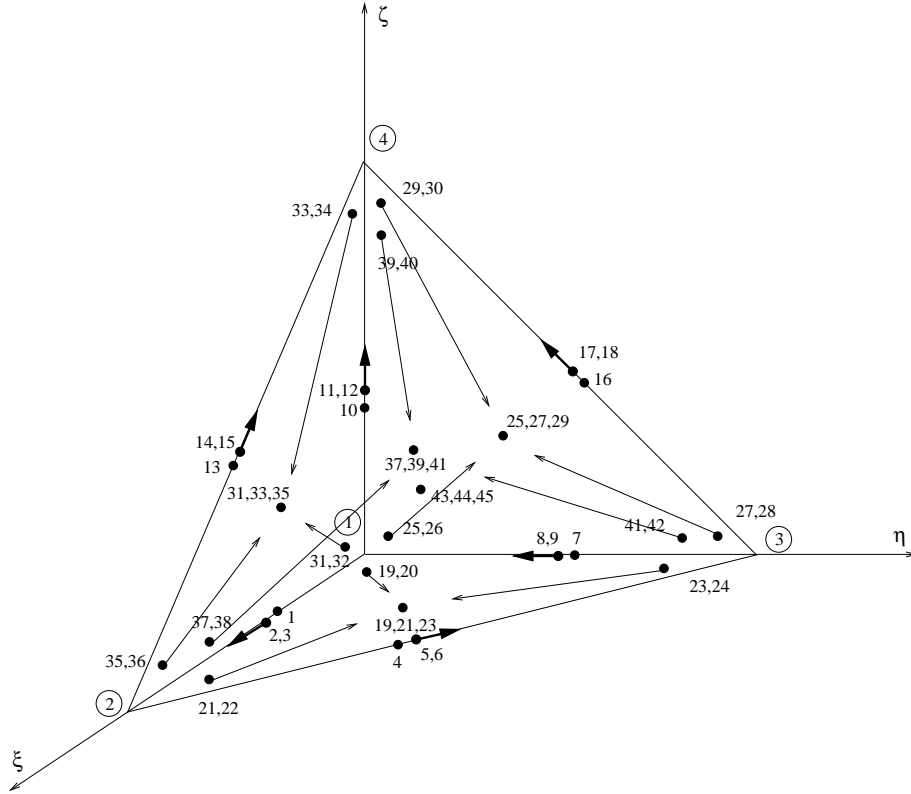


Figura 4: Tetraedro de Andersen-Volakis de Grado 3 —elemento de referencia—

Aunque ninguno de los elementos implementados sigue la definición exacta de elemento dada por Nédélec en [Nédélec(1980)] todos ellos “expanden”, sin embargo, el mismo espacio de funciones. En este sentido, se ha podido comprobar que cada una de las 45 funciones de forma de cada uno de los elementos presentados en el proyecto satisfacen las 15 condiciones que Nédélec impone al espacio de funciones expandido por el elemento de tercer orden.

En el proyecto se describen e implementan los elementos curl-conformes de orden mixto para el tetraedro de tercer grado propuestos por Peterson en sus *Versiones 1 y 2*, Andersen-Volakis, y Graglia [Peterson(1996), Peterson *et al.*(1998), Andersen y Volakis(1998), Graglia *et al.*(1997)]. Los elementos presentados responden a dos conceptos de implementación diferentes: mientras los elementos de Peterson [Peterson(1996), Peterson *et al.*(1998)] y Graglia [Graglia *et al.*(1997)], mantienen la naturaleza y construcción *Interpolatoria* de los elementos de Nédélec presentados en el Capítulo 4 del proyecto, la familia de funciones del elemento de Andersen-Volakis [Andersen y Volakis(1998)] responde a una construcción *Jerárquica*, en la que las funciones de orden superior a uno dado, o incluso las funciones correspondientes a un mismo orden, se construyen sobre la base de funciones de orden inferior o ya calculadas.

Aunque la elección de los términos “Interpolatorio” y “Jerárquico” es la que se ha adoptado en la literatura para designar a los dos tipos de elementos presentados, hay que resaltar que ésta es poco adecuada, dado que, con independencia del tipo de elementos que se emplee, éstos siempre participan en un proceso de interpolación a través del *MEF*.

Dado que todos los elementos expanden el mismo espacio de funciones, las diferencias entre los distintos elementos se traducen, por tanto, en la obtención de un conjunto de funciones de base con las que caracterizar el espacio diferente para cada uno de ellos. En este sentido se realiza un estudio detallado de cómo son cada uno de los grupos de funciones que integran las diferentes familias de funciones.

El problema fundamental que plantean estos elementos hace referencia a su ensamblado

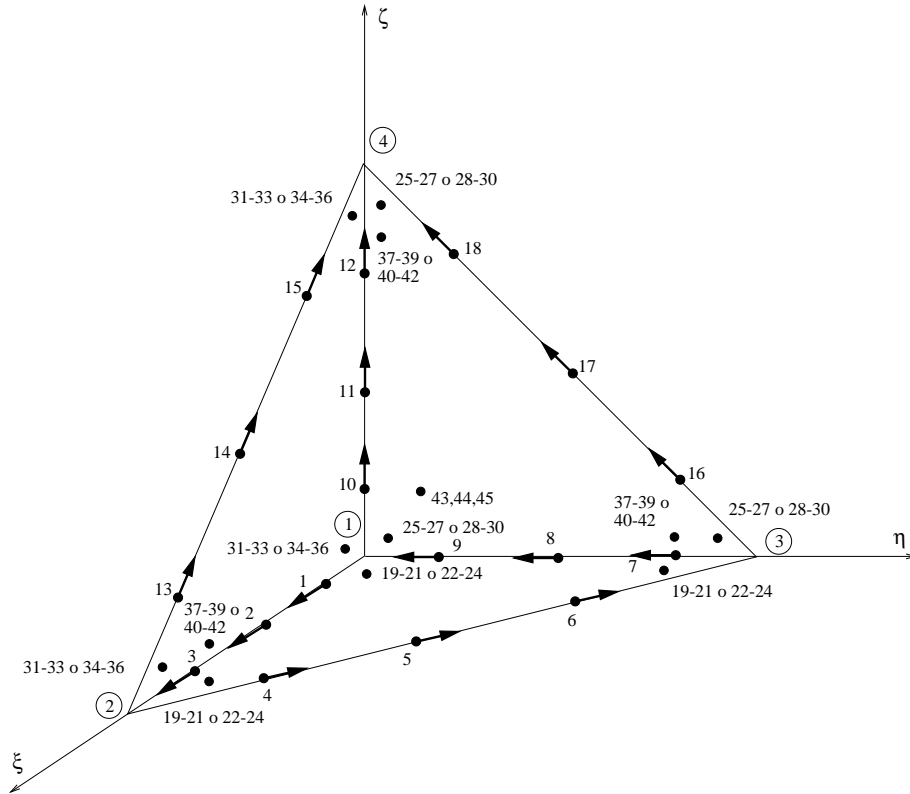


Figura 5: Tetraedro de Graglia de Grado 3 —elemento de referencia—

en el *MEF*. Por no existir una asociación clara de cada una de las funciones de forma a nodos concretos asociados a puntos físicos del mallado, dado que la definición de éstos no está incluida en la propia definición de grado de libertad o de la función, no existe un criterio predefinido en base al cual ensamblar. Este problema se soluciona proponiendo, a partir del comportamiento vectorial de cada una de estas funciones sobre las aristas o las caras, un procedimiento de asociación de las funciones a puntos físicos del elemento, determinando así un procedimiento de ensamblado automático que preserve la continuidad de la componente tangencial entre elementos. Así mismo, se estudian las propiedades de las funciones de forma en cuanto a condicionamiento, comportamiento frente a espúreos, precisión, etc.

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran los elemento de referencia correspondiente al tetraedro de tercer grado de Peterson, Andersen-Volakis y Graglia respectivamente. En ellas se puede observar la asociación de los 45 nodos que posee cada uno de los elementos a puntos físicos en las aristas, las caras o al propio tetraedro, al volumen, sin embargo, no se puede hablar de una asociación de grados de libertad a dichos puntos. Todos los elementos aquí estudiados presentan una clara desventaja frente a los elementos de Nédélec: las definiciones [Peterson(1996), Peterson *et al.*(1998), Andersen y Volakis(1998), Graglia *et al.*(1997)] no incorporan una definición del grado de libertad interpolado. En este sentido, no es posible establecer una correspondencia entre magnitudes como la componente tangencial a las aristas o las caras del elemento sin recurrir a un necesario postproceso. Dicha particularidad impide, por ejemplo, que algunas condiciones de contorno puedan imponerse de manera inmediata igualando a cero, simplemente, alguno de los grados de libertad del problema.

Al igual que el caso anterior, con objeto de ayudar al lector en la comprensión de los diferentes elementos de tercer grado expuestos, se representan las funciones de Peterson, Andersen-Volakis, y Graglia [Peterson(1996), Peterson *et al.*(1998), Andersen y Volakis(1998), Graglia *et al.*(1997)] de tercer orden en su particularización a una de las caras del tetraedro.

	Elemento 1	Elemento 2	Elementos Pegados
El. Nédélec (<i>vg</i>)	2380.3	2380.3	2756.2
El. Nédélec (<i>vc</i>)	2449.6	2449.6	2824.4
El. Peterson	2.4986 10 ⁴	2.4986 10 ⁴	3.5653 10 ⁴
El. Andersen-Volakis	1.7270 10 ⁵	1.7270 10 ⁵	2.7321 10 ⁵
El. Graglia	5.1121 10 ⁴	5.1121 10 ⁴	7.6400 10 ⁴

Tabla 1: Elementos de tercer orden. Número de Condicionamiento ($\lambda_{max}/\lambda_{min}$) de las Matrices de Masa Elementales y Ensamblada de los Elementos 1 y 2, *Caso 1* de la Figura 6

	Elemento 1	Elemento 2	Elementos Pegados
El. Nédélec (<i>vg</i>)	2.7545 10 ⁴	3.3256 10 ⁴	2.7940 10 ⁴
El. Nédélec (<i>vc</i>)	3.8801 10 ⁴	4.6683 10 ⁴	5.9774 10 ⁴
El. Peterson	4.0376 10 ⁴	6.0008 10 ⁴	7.3709 10 ⁴
El. Andersen-Volakis	2.7759 10 ⁵	4.2886 10 ⁵	5.6221 10 ⁵
El. Graglia	8.3197 10 ⁴	7.8059 10 ⁴	1.3041 10 ⁵

Tabla 2: Elementos de tercer orden. Número de Condicionamiento ($\lambda_{max}/\lambda_{min}$) de las Matrices de Masa Elementales y Ensamblada de los Elementos 1 y 2, *Caso 2* de la Figura 6

5 Resultados y Conclusiones

El autor entre otros, presenta en [Ruiz-Genovés *et al.*(2000b), Ruiz-Genovés *et al.*(2000a)] los resultados obtenidos para los elementos curl-conformes estudiados en el proyecto en su versión de segundo orden. De dicho trabajo, y de los obtenidos en [García-Castillo(1998)], así como de los resultados obtenidos en el propio proyecto se destaca en las Tablas 1 y 2 que el elemento que proporciona un menor número de condicionamiento de las matrices de masa⁴, tanto elemental como ensamblada (lo que se traduce en resultados con menos problemas en la etapa de resolución del sistema de ecuaciones), es siempre el elemento implementado por el autor, siguiendo la definición exacta de elemento dada por Nédélec [Nédélec(1980)] (implementado con la opción de trabajo *vg* descrita en el Capítulo 4 del proyecto).

Ambos son, por tanto, el elemento, [Nédélec(1980)], y la opción de trabajo, *vg*, que mejores resultados ofrecen y mejor soportan las deformaciones de los elementos (elementos poco regulares y/o alargados) en mallados arbitrarios como se muestra en [García-Castillo(1998)] y el trabajo presentado por el proyectando por lo que se concluye con la recomendación en su forma y tratamiento para una correcta programación en su incorporación a herramientas numéricas para aplicaciones electromagnéticas de nueva creación.

Así mismo, y como fruto de la labor de investigación desarrollada, se propone, como futuras líneas de actuación relacionadas con el *MEF* y los elementos curl-conformes, algunos temas de interés destacados en dicha labor y que quedan fuera de la labor abordada por el trabajo del proyectando.

⁴Cociente entre los autovalores mayor y menor ($\lambda_{max}/\lambda_{min}$) de la matriz formada por el producto interno de las funciones de base \tilde{N}_i empleadas en cada caso, es decir: $Matriz_{ij} = \langle \tilde{N}_i, \tilde{N}_j \rangle = \int_{\Omega} \tilde{N}_i \tilde{N}_j d\Omega$, donde Ω corresponde al mallado utilizado (la denominada *matriz de masa* en el *MEF*).

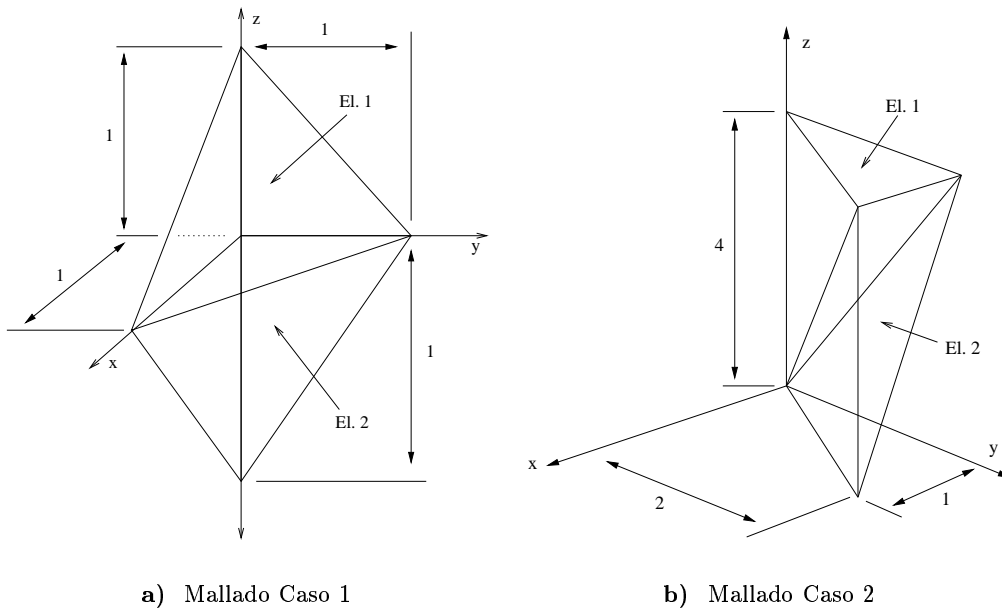


Figura 6: Ejemplos empleados en la comparación

Bibliografía

- [Nédélec(1980)] J. C. Nédélec. “Mixed finite elements in R^3 .” *Numerische Mathematik*, 35:315–341, 1980.
- [Lee *et al.*(1991a)] J. F. Lee, D. K. Sun, y Z. J. . Csendes. “Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements.” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 39(8):1262–1271, 1991a.
- [Lee *et al.*(1991b)] J. F. Lee, D. K. Sun, y Z. J. Csendes. “Tangential vector finite elements for electromagnetic field computation.” *IEEE Transactions on Magnetism*, 27(5):4032–4035, 1991b.
- [Peterson(1994)] A. F. Peterson. “Vector finite element formulation for scattering from two-dimensional heterogeneous bodies.” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(3):357–365, 1994.
- [Peterson(1996)] A. F. Peterson. “Curl-conforming mixed-order edge elements for discretizing 2D and 3D vector Helmholtz equation.” T. Itoh, G. Pelosi, y P. P. Silvester, eds., *Finite Element Software for Microwave Engineering*, Wiley Series in Microwave and Optical Engineering, págs. 101–124. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [Savage y Peterson(1996)] J. S. Savage y A. F. Peterson. “Higher-order vector finite elements for tetrahedral cells.” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 44(6):874–879, 1996.
- [Graglia *et al.*(1997)] R. D. Graglia, D. R. Wilton, y A. F. Peterson. “Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics.” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(3):329–342, 1997.
- [Andersen y Volakis(1998)] L. S. Andersen y J. L. Volakis. “Hierarchical tangential vector finite elements for tetrahedra.” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 8(3):127–129, 1998.
- [García-Castillo(1998)] L. E. García-Castillo. “Técnicas eficientes en la aplicación del método de los elementos finitos a problemas electromagnéticos.” 1998. Tesis Doctoral. E.T.S.I. Telecomunicación. Universidad Politécnica de Madrid.
- [García-Castillo y Salazar-Palma(1998)] L. E. García-Castillo y M. Salazar-Palma. “Second order Nédélec tetrahedral element for computational electromagnetics.” *4th International Workshop on Finite Elements for Microwave Engineering*. Poitiers (Francia), 1998. Comunicación C-5 (2 páginas).
- [Peterson *et al.*(1998)] A. F. Peterson, S. L. Ray, y R. Mittra. *Computational Methods for Electromagnetics*. IEEE Press, 1998.
- [García-Castillo y Salazar-Palma(2000)] L. E. García-Castillo y M. Salazar-Palma. “Second-order Nédélec tetrahedral element for computational electromagnetics.” *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields (John Wiley & Sons, Inc.)*, 13:261–287, 2000.
- [Ruiz-Genovés *et al.*(2000a)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, y M. Salazar-Palma. “A comparison among several families of mixed-order second order curl-conforming finite elements.” *5th International Workshop on Finite Elements for Microwave Engineering*. Boston (USA), 2000a. Comunicación 3-6 (1 página).

[Ruiz-Genovés *et al.*(2000b)] A. J. Ruiz-Genovés, L. E. García-Castillo, y M. Salazar-Palma.
“Comparación entre diversas familias de elementos finitos curl-conformes de orden mixto.”
XV Simposium Nacional de la URSI, págs. 567–568. Zaragoza (España), 2000b.